

Derivation and Model Establishment of Mathematical Differential Equation for Straddle Monorail Vehicle

BaoLiang LUO

College of mechanical and Automobile Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing, 400074, CHINA

Abstract: In order to derive the mathematical differential equation of the monorail vehicle, the monorail system of Chongqing is used as the research object, and each compartment is simplified as a multi-body dynamics system with 15 degrees of freedom. Considering the lateral characteristics of rubber tires, Influence of Six-level Pavement Spectrum Excitation Simulation Track Beam on the Operation of Straddle Monorail Vehicle. The vibration differential equation of the vehicle is derived from the Lagrangian principle, and the dynamic model of the monorail vehicle is established in MATLAB / SIMULIK. It is found that the results of the monorail model are in good agreement with the actual situation.

Keywords: Straddle-type monorail vehicle; Lagrange principle; Cornering characteristic; Road spectrum

跨座式单轨车辆数学微分方程推导及模型建立

罗宝良

重庆交通大学 机电与车辆工程学院, 重庆, 中国, 400074

摘要: 为推导跨座式单轨车辆数学微分方程, 以重庆市单轨车辆系统为研究对象, 将每节车厢简化为 15 个自由度的多体动力学系统, 且考虑了橡胶轮胎的侧偏特性, 用美国六级路面谱激励模拟轨道梁对跨座式单轨车辆运行的影响。由拉格朗日原理导出车辆运行时的振动微分方程, 并在 MATLAB/SIMULIK 中建立单轨车辆的动力学模型, 研究表明所建立跨座式单轨模型分析结果与实际工况运行情况相吻合。

关键词: 跨座式单轨车辆; 拉格朗日原理; 侧偏特性; 路面谱

1 引言

迫于日益严重的城市交通拥堵问题, 跨座式单轨交通系统作为一种短距离和中小客流量的轨道交通系统, 具有众多环境友好型优点, 已成为城市轨道交通广泛关注的最新制式。目前, 对跨座式单轨交通系统动力学的研究主要集中在日本, 如 C.H.Lee[1]等以大阪跨座式单轨车辆及钢桥为研究对象, 对车-桥的耦合动力学模型中相互作用关系进行了研究分析; Kim[2]等研究了跨座式单轨列车在轨道梁上的地振响应。国内在这方面的研究起步相对较晚, 作为开启我国对跨座式单轨交通系统进行动力学研究先河的同济大学任利惠[3]教授将橡胶轮胎线性化处理, 建立了单轨车辆动力学模型并对其进行了分析研究; 西南交通大学马继兵[4]以跨座式单轨交通系统走行部为研究对象, 对车桥耦合振动进行了分析, 评价了车辆的乘坐舒适性。总的来说目前对列车动力学的研究主要集中在传统的钢轮钢轨式列车, 对跨座式单轨车辆相关方面的研究

相对较少, 而对跨座式单轨车辆系统车桥耦合动力学方面的研究更是少之又少。

本文以重庆市 3 号线跨座式单轨交通系统为研究对象, 将每节车厢简化为 15 个自由度的动力系统, 考虑了各轮胎的侧偏特性, 建立了跨座式单轨车-桥耦合动力学模型。其中采用美国六级路面谱模拟跨座式单轨车辆的 PC 轨道梁对车辆运行的影响, 由拉格朗日方程导出车辆的运行振动微分方程, 并对跨座式单轨系统做了动力学分析。

2 跨座式单轨车辆结构及模型简化

2.1 跨座式单轨车辆结构特点

跨座式单轨车辆每节车厢由一个车体和两个转向架组成, 车厢与传统轨道交通车辆相比并无差异, 但每个转向架是由 4 个走行轮、4 个导向轮和 2 个稳定轮组成的, 且均为橡胶轮胎如图 1。车辆运行过程中, 走行轮与稳定轮紧紧“抱”住轨道梁, 其轨道梁

不仅是承重结构，更是支撑和约束车辆行驶的轨道。因此，跨座式单轨交通的运行机理有其独特之处。

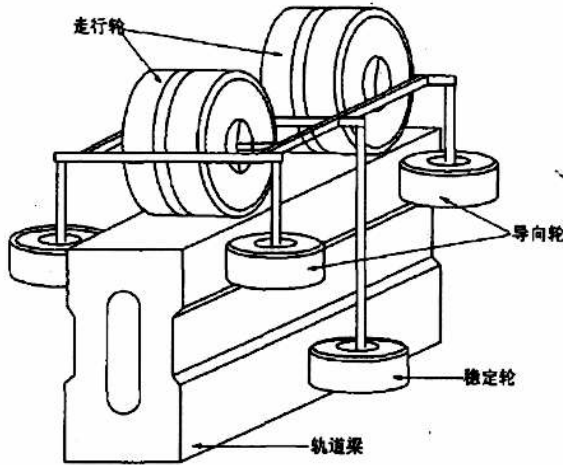


图 1. 跨座式单轨车辆转向架示意图

2.2 车辆动力学模型简化

与普通轮轨交通车辆系统一样，跨座式单轨车辆也被简化为包含多个刚体的多体运动学模型，且不计转向架扭曲变形；假定各车轮式中与轨道梁接触。将车辆离散为 1 个车体和 2 个转向架，均考虑浮沉运动(Z)、横摆运动(Y)、侧滚运动(θ)、摇头运动(φ)、点头运动(ψ)这 5 个自由度，故每节车厢共 15 个自由度如图 2:

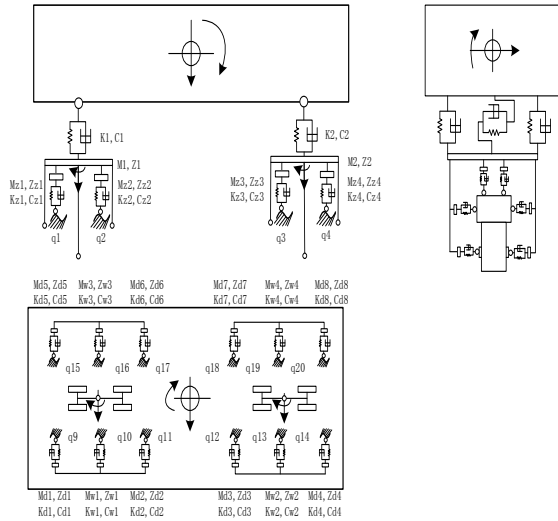


图 2. 跨座式单轨车辆简化模型

3 车辆-轨道梁耦合动力学模型

3.1 轨道梁运动微分方程

车辆运行过程中认为 PC 梁为刚体，用轨道路面谱模拟轨道梁对车辆运动过程中的激励。研究表明重庆市跨座式单轨轨道不平度与美国六级路面谱相当，本文采用美国六级路面谱模拟 PC 路面谱，并用三角级数叠加法将其生成时程样本。美国六级路面谱数学表达式为式(1):

$$S_v(\Omega) = \frac{kA_v\Omega_c^2}{\Omega^2(\Omega^2 + \Omega_c^2)} \quad (1)$$

3.2 轮胎动力学模型

与传统钢轮钢轨式列车不同的是，单轨车辆的轮胎都为橡胶轮胎，而橡胶轮胎是一个复杂的粘弹性结构[5]，具有较明显的非线性特性。为简化模型，本文将橡胶轮胎模型简化为如图 3 所示点接触式线性阻尼模型。此外，跨座式单轨车辆运行过程中，橡胶轮胎主要受到径向力和侧偏力的作用。

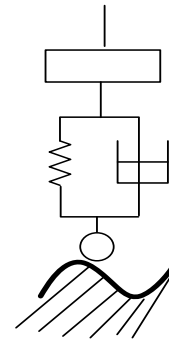


图 3. 橡胶轮胎简化模型

3.2.1 轮胎径向力作用

轮胎在运行的过程中，由于轨道梁表面不平度的原因，其接触点和转向架之间会存在径向位移差，从而引起轮胎径向力作用，各个轮胎径向力可表述为:

走行轮径向力:

$$F_{wjlk} = -[K_{2,jlk} (Z_{wjlk} - q_{jlk} + (-1)^l L_w \phi_{ij} + (-1)^k d_w \theta_{ij} - Z_{ij}) + C_{2,jlk} (Z_{wjlk} - q_{jlk} + (-1)^l L_w \phi_{ij} + (-1)^k d_w \theta_{ij} - Z_{ij})] \quad (2)$$

导向轮径向力:

$$F_{gjlk} = -[K_{3,jlk} (Y_{gjlk} - q_{jlk} - Y_{ij} + h_g \theta_{ij} + (-1)^{l+k} L_g \phi_{ij}) + C_{3,jlk} (Y_{gjlk} - q_{jlk} - Y_{ij} + h_g \theta_{ij} + (-1)^{l+k} L_g \phi_{ij})] \quad (3)$$

稳定轮径向力:

$$F_{sjlk} = -[K_{4,jlk} (Y_{sjlk} - q_{jlk} - Y_{ij} + h_s \theta_{ij}) + C_{4,jlk} (Y_{sjlk} - q_{jlk} - Y_{ij} + h_s \theta_{ij})] \quad (4)$$

其中下标 g、w、s 分别表示导向轮、走形轮和稳定轮。

3.2.2 轮胎侧偏力及回正力矩

跨座式单轨车辆运行过程中，由于轨道梁两侧的导向轮和稳定轮所受的激励不一样。会使车轮平面与车轮行驶方向之间产生一个称之为侧偏角[6]的夹角，作用机理如图 4 所示。

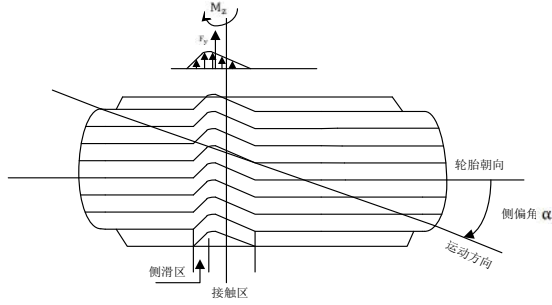


图 4. 滚动轮胎在侧向力作用下的变形

当车辆以速度 v 运行的过程中由于 PC 轨道梁的干扰会产生一个大小为 v' 的横向速度如图 5 所示，进而产生一个大小为 α 的侧偏角。

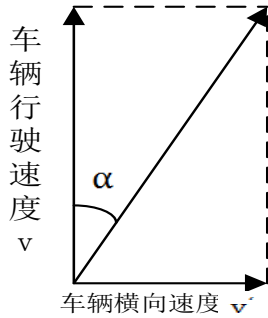


图 5. 侧偏角示意图

因此对于走形轮侧偏角可表示为[6,7]:

$$\alpha_{wjl} = \frac{Y_{ij} - (-1)^l L_w \varnothing_{ij} - h_r \theta_{ij} - Y_{wjl}}{V} - \varnothing_{ij} \quad (5)$$

导向轮侧偏角表示为:

$$\alpha_{gjl} = \frac{Z_{ij} - (-1)^k a_s \theta_{ij} - Z_{sjlk}}{V} - \varphi_{ij} \quad (6)$$

稳定轮侧偏角表示为:

$$\alpha_{sjl} = \frac{Z_{ij} - (-1)^l L_g \varphi_{ij} - (-1)^k a_g \theta_{ij} - Z_{gilk}}{V} - \varphi_{ij} \quad (7)$$

由式(5)、式(6)和式(7)可得到各个轮胎的侧偏力和回正力矩:

走形轮侧偏力:

$$F_{cwjlk} = K_w \left(\frac{Y_{ij} - (-1)^l L_w \varnothing_{ij} - h_r \theta_{ij} - Y_{wjl}}{V} - \varnothing_{ij} \right) \quad (8)$$

导向轮侧偏力:

$$F_{cgsilk} = K_g \left(\frac{Z_{ij} - (-1)^k a_s \theta_{ij} - Z_{sjlk}}{V} - \varphi_{ij} \right) \quad (9)$$

稳定轮侧偏力:

$$F_{csjlk} = K_s \left(\frac{Z_{ij} - (-1)^l L_g \varphi_{ij} - (-1)^k a_g \theta_{ij} - Z_{gilk}}{V} - \varphi_{ij} \right) \quad (10)$$

走形轮回正力矩:

$$M_{wjlk} = K_w \left(\frac{Y_{ij} - (-1)^l L_w \varnothing_{ij} - h_r \theta_{ij} - Y_{wjl}}{V} - \varnothing_{ij} \right) \quad (11)$$

导向轮回正力矩:

$$M_{gsilk} = K_g \left(\frac{Z_{ij} - (-1)^k a_s \theta_{ij} - Z_{sjlk}}{V} - \varphi_{ij} \right) \quad (12)$$

稳定轮回正力矩:

$$M_{sjlk} = K_s \left(\frac{Z_{ij} - (-1)^l L_g \varphi_{ij} - (-1)^k a_g \theta_{ij} - Z_{gilk}}{V} - \varphi_{ij} \right) \quad (13)$$

3.3 二系悬挂作用力模型

单轨车辆运行过程中由于车体和转向架位移不一致会导致来自空气弹簧的弹簧力和阻尼力，即为二系悬挂作用力，具体受力如下:

二系悬挂横向力:

$$F_{syj} = k_{sj} \left[Y_c - Y_{ij} - \theta_c h_1 - \theta_{ij} h_2 - (-1)^j L_c \varnothing_c \right] + \quad (14)$$

$$C_{sj} \left[Y_c - Y_{ij} - \theta_c h_1 - \theta_{ij} h_2 - (-1)^j L_c \varnothing_c \right]$$

二系悬挂垂向力:

$$F_{szjk} = K_{1,jk} \left(Z_c - Z_{ij} - (-1)^k \theta_c d_s + (-1)^k \theta_{ij} d_s - (-1)^j L_c \varphi_c \right) + \quad (15)$$

$$C_{1,jl} \left(Z_c - Z_{il} + (-1)^k \theta_c d_s - (-1)^k \theta_{ij} d_s - (-1)^j L_c \varphi_c \right)$$

3.4 车辆动力学模型

如图 2 分析可知，跨座式单轨车辆车体直接通过二系悬挂与转向架相连，因此车体除了受到自身的重力之外还受到来自二系悬挂的作用力和力矩。车体运动方程如下:

横摆运动:

$$M_c \ddot{Y} = -F_{sy1} - F_{sy2} \quad (16)$$

浮沉运动:

$$M_c \ddot{Z}_c = -F_{sz11} - F_{sz12} - F_{sz21} - F_{sz22} \quad (17)$$

侧滚运动:

$$J_{c\theta} \ddot{\theta}_c = d_s F_{sz12} + d_s F_{sz22} - d_s F_{sz11} - d_s F_{sz21} - h_1 F_{sy1} - h_1 F_{sy2} \quad (18)$$

点头运动:

$$J_{c\varphi} \ddot{\varphi}_c = L_c F_{sz21} + L_c F_{sz22} - L_c F_{sz11} - L_c F_{sz12} \quad (19)$$

摇头运动:

$$J_{c\varnothing} \ddot{\varnothing}_c = L_c F_{sy2} - L_c F_{sy1} \quad (20)$$

从方程式(16)~(20)式可以看出跨座式单轨车辆的动力学方程与普通的钢轮钢轨式列车车体的振动微分方程相似[7,8]。

3.5 转向架动力学方程

转向架是连接轮胎和车体的中间构件, 因此在其运动的过程中即受到一系悬挂作用力的约束同时又受到二系悬挂作用力的约束, 通过分析得到其运动方程如下:

横摆运动(j=1,2):

$$M_{ij} \ddot{Y}_j = F_{syj} - F_{sj1} - F_{sj2} - F_{gj11} - F_{gj12} - F_{gj21} - F_{gj22} - F_{cwj11} - F_{cwj12} - F_{cwj21} - F_{cwj22} \quad (21)$$

浮沉运动(j=1,2):

$$M_{i1} \ddot{Z}_{i1} = F_{szj1} + F_{szj2} - F_{wj11} - F_{wj12} - F_{wj21} - F_{wj22} - F_{cgj11} - F_{cgj12} - F_{cgj21} - F_{cgj22} - F_{csj1} - F_{csj2} \quad (22)$$

侧滚运动(j=1,2):

$$J_{i\theta_j} \ddot{\theta}_j = d_s F_{szj2} - d_s F_{szj1} + h_s F_{sj1} + h_s F_{sj2} - d_w F_{wj12} - d_w F_{wj22} + d_w F_{wj11} + F_{wj21} - h_g F_{gj12} - h_g F_{gj22} + h_g F_{gj11} + h_g F_{gj21} + h_2 F_{syj} + h_1 F_{cwj11} - h_1 F_{cwj12} + h_1 F_{cwj21} - h_1 F_{cwj22} - b_{gt} F_{cgj12} - b_{gt} F_{cgj22} + b_{gt} F_{cgj11} + b_{gt} F_{cgj21} - b_{st} F_{csj12} + b_{st} F_{csj22} \quad (23)$$

点头运动(j=1,2):

$$J_{i\varphi_j} \ddot{\varphi}_j = L_w F_{wj21} + L_w F_{wj22} - L_w F_{wj11} - L_w F_{wj12} + M_{gj11} + M_{gj12} + M_{gj21} + M_{gj22} + M_{sj1} + M_{sj2} \quad (24)$$

摇头运动(j=1,2):

$$J_{i\varnothing_j} \ddot{\varnothing}_j = L_g F_{gj12} + L_g F_{gj21} - L_g F_{gj11} - L_g F_{gj22} - L_w F_{cwj11} - L_w F_{cwj12} + L_w F_{cwj21} + L_w F_{cwj22} + M_{wj11} + M_{wj12} + M_{wj21} + M_{wj22} \quad (25)$$

3.6 车辆-轨道梁耦合力学模型

将车体运动方程式(16)~(20)和转向架运动方程式(21)~(25)结合得到车辆-轨道梁耦合振动微分方程组:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \quad (26)$$

式中 M,C 和 K 分别为跨座式单轨车辆系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。

4 仿真结果及分析

以重庆市轨道交通三号线为研究对象, 在不同车速工况下进行仿真分析, 结果如图 6、图 7 所示: 由图分析可知, 车身质心加速度虽然随车速的增加而不断增加但是并非呈线性增长, 而是车速越大, 加速度增长的幅值就越大。将分析结果与实测结果表 1 对比分析可知,模拟仿真的车身质心加速度振动幅值与实测数据基本上吻合。

5 结论

1) 将 PC 轨道梁视为刚体, 用美国六级路面谱模拟轨道对车辆运行过程中的影响, 并对跨座式单轨车辆模型进行合理的简化, 由拉格朗日原理推导出了单轨车辆的动力学模型;

2) 在直线段不同工况下用 matlab/simulink 仿真软件分析, 发现模拟结果与实测结果基本相符。

表 1. 加速度幅值对比

对比参数	车速 / (km/h)	仿真数据 / (m/s ²)	实测数据 / (m/s ²)
垂向加速度幅值	20	-0.06~0.06	-0.04~0.05
	40	-0.06~0.07	-0.05~0.06
	60	-0.07~0.08	-0.06~0.06
	80	-0.07~0.09	-0.06~0.08
	100	-0.07~0.1	-0.08~0.09
横向加速度幅值	20	-0.6~0.5	-0.4~0.3
	40	-0.5~0.5	-0.4~0.4
	60	-0.6~0.6	-0.5~0.4
	80	-0.8~0.7	-0.6~0.5
	100	-0.8~0.8	-0.7~0.5

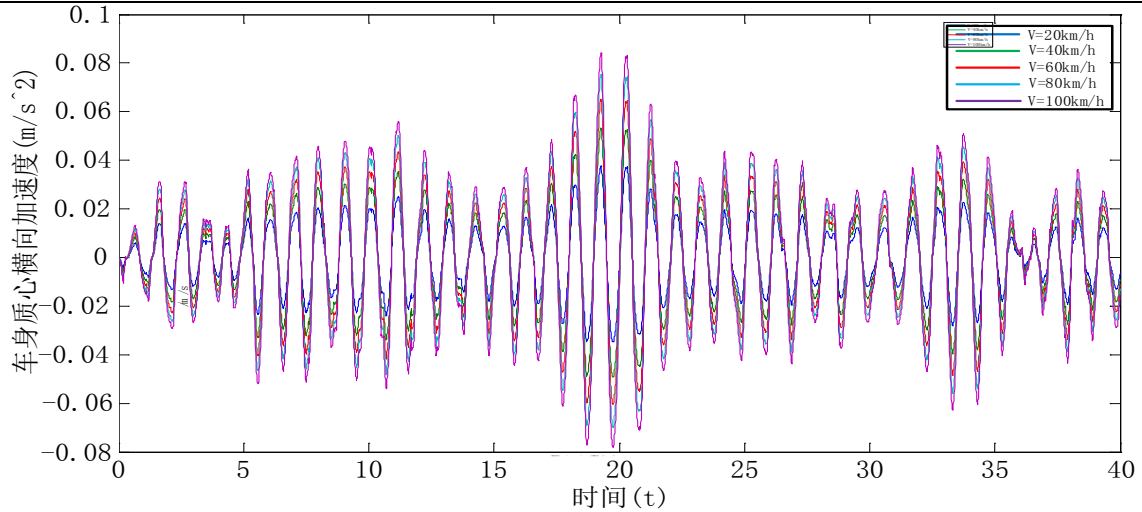


图 6. 车身横向加速度时域曲线

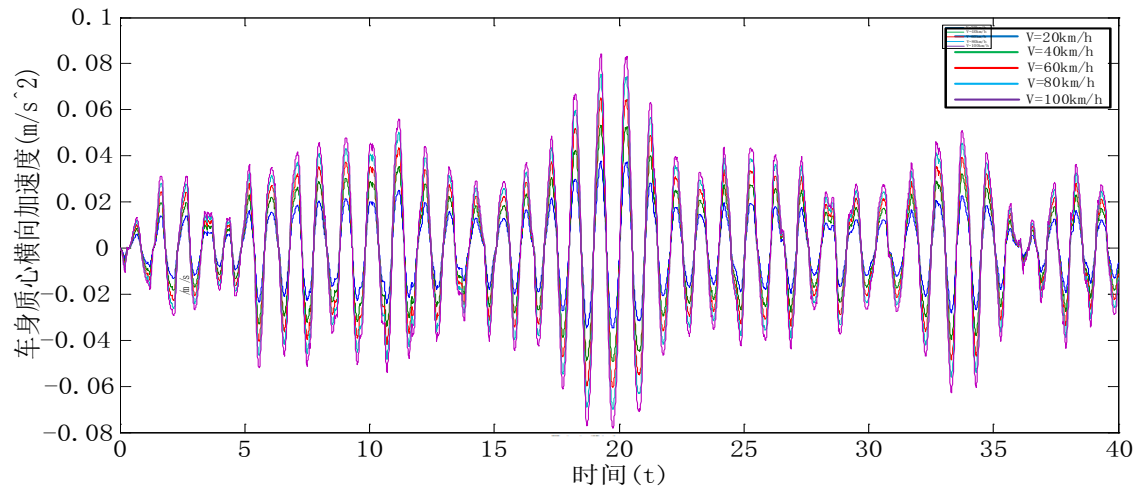


图 7. 车身垂向加速度时域曲线

References(参考文献)

[1] Lee C H, Kawatani M, Kim C W ,et al. Dynamic response of a monorail steel bridge under a moving train [J].Journal of Sound and Vibration,2006,294(3):562-579.
 [2] KIM C W, KAWATANI M, LEE C H, et al. Seismic response of a monorail bridge incorporating train-bridge interaction[J]. Structural Engineering and Mechanics 2007,26(2):111-126.
 [3] REN Li-hui, ZHOU Jin-song, SHEN Gang. Dynamics Model and Simulation Study of a Straddle Type Monorail Car[J]. China Railway Science.2004,25(5):26-32.
 [4] MA Ji-bing. Research on Structural Static and Dynamic Beha-

vivors of Straddle-type Monorail Transportation System[D].Sichuan: Southwest Jiaotong University.2008.
 [5] Dave Crolla, Yufan. Vehicle dynamics and its control. Beijing: People's Publishing House,2007.
 [6] XIA He, ZHANG Nan. Vehicles and structure dynamic interaction(Second edition)[M].Beijing: Science Press,2005.
 [7] ZHANG Kai. Analysis of Bridge-Vehicle Coupling Vibration on Curve Bridge of Straddle Monorail Transit[D].Beijing: Beijing Jiaotong University.2012.
 [8] LIU Yu-yu. Research on Dynamic Interaction of Straddle Type Monorail Vehicle and Track Beam[D]. Sichuan: Southwest Jiaotong University.2011.