

The Initial Equilibrium State of Suspension Cable based on Matlab Software

Xin Liu¹, Wei Zhang²

¹School of Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing province, China

Abstract: The numerical analytical method of spatial cable shape is used to solve the initial equilibrium state accurately, and it is confronted with the high initial value, which is difficult to solve. This paper is based on the Matlab mathematical software fsolve function to write an iterative method for solving. Writing the traditional matrix method to solve the influence matrix method, the comparison results show that the former is of low precision, and it is easy to converge.

Keywords: Spatial suspension; Influence matrix; Fsolve; Initial equilibrium state

基于 Matlab 软件求悬索初始平衡态

刘欣¹, 张伟²

¹重庆交通大学, 土木工程学院, 重庆, 中国, 400074

摘要: 空间索形的悬索用数值解析法精确求解初始平衡状态时, 面临对初值要求高, 求解收敛困难问题。本文基于 Matlab 数学软件的 fsolve 函数编写迭代法求解, 并编写传统的影响矩阵法迭代求解, 对比发现前者对初值要求精度低, 并且收敛容易。

关键词: 空间悬索; 影响矩阵; fsolve; 初始平衡状态

1 引言

本文主要以空间风缆为例来验证新解法对初值要求低, 收敛容易, 并且将程序计算得到的主缆无应力索长、吊杆无应力索长以及索夹坐标, 带进通用有限元软件 Midas/civil 里进行非线性分析, 结果显示所有节点位移量都是 0mm, 收敛性好。

2 基本方程

2.1 主缆平衡方程

对空间缆索而言, 节点间只受自重作用, 所以索段在一个铅垂面上[1]。图 1 所示为空间索段的计算图示, 它们在各自铅垂面内满足如下平衡方程:

$$\begin{cases} l = \frac{HS}{EA} + \frac{H}{q} \left[\arcsin h\left(\frac{V}{H}\right) - \arcsin h\left(\frac{V-W}{H}\right) \right] \\ h = \frac{S}{EA} \left(V - \frac{W}{2} \right) + \frac{1}{q} \left[\sqrt{H^2 + V^2} - \sqrt{H^2 + (V - qS)^2} \right] \end{cases}$$

其中:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}, l = \sqrt{L^2 + D^2}$$

式中 S、E、A 分别指索段的无应力索长、弹性模量和面积, q 指索段的自重集度, w = qS。其他参数

含义参考图 1。

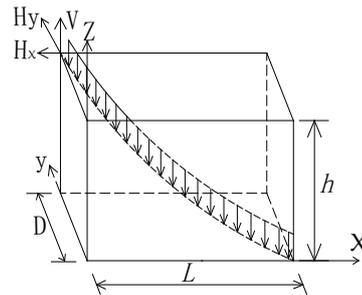


图 1. 一个索段计算图示

如果确定了 H_x、H_y 这两个水平分力, 那么就确定了索段所在铅垂面的空间走向。那么

$$D = L \cdot H_y / H_x \quad (2)$$

2.2 吊索的平衡方程

间索形的吊杆在横桥向是倾斜的, 计算时将其看成弹性悬链线才能保证计算精度。图 2 为其计算图示。

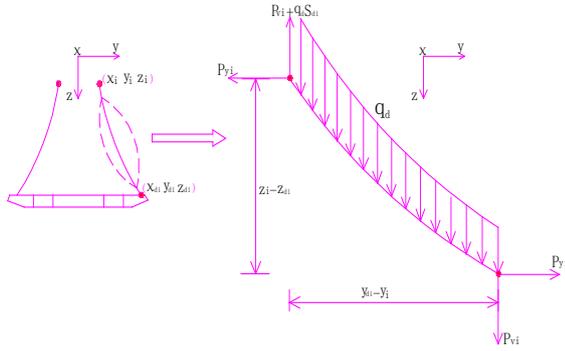


图 2. 空间吊杆计算图示

主缆和吊杆结合起来可得到主缆各索段始端分力的递推关系如下：

$$\begin{cases} H_{xi} = H_{xi-1} = H_{x0} \\ H_{yi} = H_{yi-1} - P_{yi} = H_{y0} - \sum_1^i P_{yi} \\ V_i = V_{i-1} - qS_{i-1} - P_{vi} - q_d S_{di} = \\ V_0 - q \sum_0^{i-1} S_{i-1} - \sum_i^i P_{vi} - q_d \sum_1^i S_{di} \\ (i = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

每根吊杆的已知量有：荷载集度 q_{di} ，上下端的横、竖向距离 $y_{di} - y_i$ 、 $z_i - z_{di}$ ，下端的竖向分力 P_{vi} 。未知量有：吊杆的无应力索长 S_{di} ，横向分力 P_{yi} 。

令 $l = y_{di} - y_i$ ， $h = z_i - z_{di}$ ， $V = P_{vi}$ 。然后代入(1)式既可以算得 H 和 S ， H 对应吊杆的 P_{yi} ， S 对应吊杆的 S_{di} 。(1)式是非线性方程组，要求解 H 和 S 需用迭代法求解。文献[3]介绍了 fsolve 的用法以及数值求解上用到的一些常用的迭代法，那些方法都可以采用。笔者采用 fsolve 函数来求解(1)式。对于吊杆上端的坐标 (x_i, y_i, z_i) 是通过主缆端点的坐标迭代算出来的。

3 算法推导

3.1 主缆线性计算步骤

成桥状态计算时，先计算主跨主缆的线性和索力，然后根据主缆沿桥轴线水平力不变为原则计算其余边跨[2]。下面以主跨为例说明计算过程，如图 3 所示。

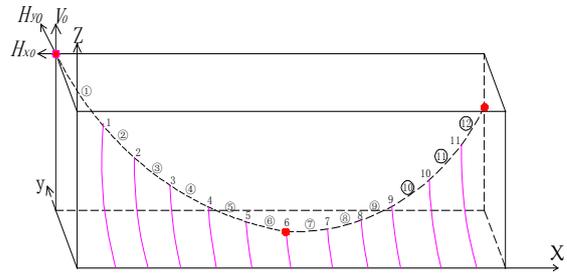


图 3. 主跨计算图示

设主缆的左端点为 $B1(x_0, y_0, z_0)$ ，右端点为 $B2(x_{12}, y_{12}, z_{12})$ ，垂点为节点 6，节点 6 的 Z 坐标为 z_6 ，还有吊杆下端点的坐标数据、竖向力，吊杆上端点的 x 坐标值，这些都是已知的。当然主缆、吊杆的 E 和 A 也都是给定的。

(1) $B1$ 点距离节点 1 的水平距离为 L_1 ，假定主缆 $B1$ 点的主缆力分量 H_{x0} 、 H_{y0} 、 V_0 ，将 $H_0 = \sqrt{H_{x0}^2 + H_{y0}^2}$ ， V_0 ， $l_1 = L_1 \cdot H_0 / H_{x0}$ 代入(1)式中算得 S_1 、 h_1 。那么节点 1 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) ，其中

$$y_1 = y_0 - L_1 \cdot \frac{H_{y0}}{H_{x0}}, z_1 = z_0 - h_1。$$

(2) 有了 1 号吊杆的上下端点的坐标，吊杆下端的竖向力以及①号缆段的 S_1 ，那么就可以代入(3)式，从而得到②号缆段左端点的三向分力 H_{x1} 、 H_{y1} 、 V_1 。

(3) 然后将②号缆段左端点的三向分力为已知力，然后按步骤(1)和步骤(2)的计算方式得到节点 2 的坐标以及③号索段左端点的三向分力。以此类推下去就可以算得主缆上所有节点的坐标，得到的节点 6、 $B2$ 坐标分别为 (x_6, y_6, z_6) 、 (x_{12}, y_{12}, z_{12}) 。

$$\text{由此可得: } \begin{cases} ef = z_0 - z_6 \\ ey = y_0 - y_{12} \\ ez = z_0 - z_{12} \end{cases}$$

$$\text{而目标值是 } \begin{cases} ef = z_0 - z_6 \\ ey = y_0 - y_{12} \\ ez = z_0 - z_{12} \end{cases}$$

(4) 修正 $B1$ 端的三向分力初值，直到满足收敛条件 $\begin{cases} |ef - ef'| \leq eps \\ |ey - ey'| \leq eps \\ |ez - ez'| \leq eps \end{cases}$ 为止 (eps 为允许误差精度)，得到主缆线性。

上面的步骤 (1)、(2)、(3) 可以组成一个函数： $f(H_{x0}, H_{y0}, V_0) = [ef' ey' ez']^T$ ，这个函数的目的就是输入 B1 端的三向分力，会得到 ef' 、 ey' 、 ez' 的值。

3.2 影响矩阵法

影响矩阵的迭代法其实就是泰勒公式的前两项。令 $\Delta e = [ef' ey' ez']^T$ ，那么主缆线性的求解可以表示为： $F(H_{x0}, H_{y0}, V_0) = f(H_{x0}, H_{y0}, V_0) - \Delta e = 0$ ，将其简写成如下：

$$F(t) = f(t) - \Delta e = 0$$

取 $F(t)$ 泰勒公式的前两项可得：

$$F(t) = f(t_1) - \Delta e + f'(t_1) \cdot (t - t_1) = 0$$

$$t = t_1 - \frac{f(t_1) - \Delta e}{f'(t_1)} \quad (4)$$

式子 (4) 就是修正初值 H_{x0}, H_{y0}, V_0 的计算方法。

具体的步骤如下：

(1) 首先计算影响矩阵，其实就是函数 $f(H_{x0}, H_{y0}, V_0)$ 对三个自变量的偏微分。

$$[C_{11} C_{21} C_{31}]^T = f(H_{x0} + 1, H_{y0}, V_0) - f(H_{x0}, H_{y0}, V_0)$$

$$[C_{12} C_{22} C_{32}]^T = f(H_{x0}, H_{y0} + 1, V_0) - f(H_{x0}, H_{y0}, V_0)$$

$$[C_{13} C_{23} C_{33}]^T = f(H_{x0}, H_{y0}, V_0 + 1) - f(H_{x0}, H_{y0}, V_0)$$

那么影响矩阵： $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$

(2) 求解初值的修正量 $(\Delta H_{x0}, \Delta H_{y0}, \Delta V_0)T$ ：

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_{x0} \\ \Delta H_{y0} \\ \Delta V_0 \end{bmatrix} = f(H_{x0}, H_{y0}, V_0) - \Delta e = \begin{bmatrix} ef' - ef \\ ey' - ey \\ ez' - ez \end{bmatrix}$$

(3) 修正 B1 端的三向分力为： $H_{x0} = H_{x0} - \Delta H_{x0}$ ， $H_{y0} = H_{y0} - \Delta H_{y0}$ ， $V_0 = V_0 - \Delta V_0$ ，重新迭代计算，直到满足收敛条件。

3.3 Fsolve 法

避免了自己编写繁琐的迭代程序，直接去解如下方程组：

$$\begin{cases} ef - ef' = 0 \\ ey - ey' = 0 \\ ez - ez' = 0 \end{cases} \quad (5)$$

这个方程组中 ef' 、 ey' 、 ez' 是需要调用函数 $f(H_{x0}, H_{y0}, V_0)$ 才可以得到的，也就是说 ef' 、 ey' 、

ez' 这三个变量是没有确切的表达式的。在用 `fsolve` 函数前，得定义个方程组的函数。下面贴出这个函数：

```
function y = diedai(x)
    ef, ey, ez;
    H_x0 = x(1);
    H_y0 = x(2);
    V_0 = x(3);
    [ef' ey' ez']^T = f(H_x0, H_y0, V_0);
    y(1) = ef - ef';
    y(2) = ey - ey';
    y(3) = ez - ez';
end
```

然后用 `fsolve` 去解这个方程组的函数，具体的 `fsolve` 解方程用法请参考文献[3]。

4 案例分析

按照上述两种计算方法，采用 Matlab 语言编制了相应的程序，以求解一个风缆为例子，进行对比。风缆图示如图 4 所示：

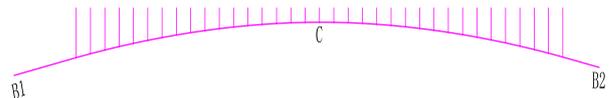


图 4. 风缆立面图示

已知两端点的坐标(单位:m),

B1(30.425, -22.0945, 307.442), B2(317,-

18.379, 310.5243), C 的 Z 坐标是 321.4938。吊杆间距是 6m, B1 距离第一根吊杆水平距为 52.075m, B2 距离末吊杆水平距 30.500m。吊杆上端点都有 12kN 向上的力，材料特性如表 1 所示。

表 1. 材料特性

| 材料名 | 容重 (kN/m ³) | 主缆直径 (m) | 弹性模量 (kN/m ²) |
|-----|-------------------------|----------|---------------------------|
| 主缆 | 84.56 | 0.0638 | 1.9500E+008 |
| 吊杆 | 125.9 | 0.0132 | 1.9500E+008 |

此模型的真实解(单位: kN)是 $[H_{x0}, H_{y0}, V_0]^T = [1284.3866, 211.1022, 166.3225]^T$ ，然后将程序算的主缆节点坐标、分段无应力索长、吊杆无应力索长输入 Midas/civil 软件里,约束条件为: B1 和 B2 点固结,吊杆上端点只约束 Y 方向的位移。然后做非线性分析,查看所有节点位移,结果显示都是 0mm 位

移, 收敛很好。传统的影响矩阵法对 H_{x_0}, H_{y_0}, V 的初值要求精度很高, 但是 `fsolve` 法对初值要求精度低。笔者取初值 $[H_{x_0}, H_{y_0}, V_0]^T = [1000, 1000, 1000]^T$ (初值和真实解相差很大), 发现影响矩阵法无法收敛, 但是 `fsolve` 法能收敛, 得到的结果和真实解一样。如果初值给的比较接近真实解, 那么影响矩阵法的迭代还是比较快的, 也能得到此结果。

5 结语

本文主要介绍了, 借助商业数学软件 `Matlab` 里的 `fsolve` 函数, 进行空间索的计算。并且和传统的影响

矩阵法相比, 其对初值要求低, 容易收敛。并且将程序计算的结果带进 `Midas/civil` 里进行验证, 收敛性很好。为悬索找形提供了另一种解决途径。

References (参考文献)

- [1] Xiaoming Wang, Xianwu Hao, Ruifang Duan. Based on enterprise Steffens - Newton method space cable shape of suspension bridge is the initial state of equilibrium analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011.
- [2] Xiaoming Wang, Yaobei He, Xuefei Shi, Xin Ruan. Initial Equilibrium State Analysis of Self-anchored Suspension Bridge with Spatial Cables[J]. Journal of Tongji University, 2010.
- [3] Yujie Ren. Numerical analysis and Matlab[M]. Higher education press, 2007.