

# Development of Numerical Limit Analysis Method and its Application in Slope Engineering

Sijie Liu

School of River & Ocean Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing, China  
Email: egx136788@163.com

**Abstract:** The numerical limit analysis method has the advantages of both numerical analysis and traditional limit analysis. In recent years, domestic scholars have vigorously developed the numerical limit analysis method, in the basic theory, calculation accuracy, engineering application scope has made significant progress. This paper introduces the development of numerical limit analysis method and its application in slope engineering.

**Keywords:** Slope engineering; Limit equilibrium method; Strength reduction method; Gravity load method; Stability coefficient

## 数值极限分析法的发展及其在边坡工程中的应用

刘思杰

重庆交通大学 河海学院, 重庆, 中国, 41007  
Email: egx136788@163.com

**摘要:** 数值极限分析法兼有数值分析法与传统极限分析法的优点。近年来, 国内学者大力发展数值极限分析法, 在基本理论、计算精度、工程应用范围的拓宽等方面取得了重大进展。本文详细介绍了数值极限分析法的发展及其在边坡工程中的应用。本电子文档定义了由香港新世纪文化出版社 (HKNCPP) 出版的各种中文学术会议论文集的标准文章格式。

**关键词:** 岩土工程; 边坡工程; 极限分析法; 有限元法

### 1 引言

当前, 边坡稳定性定量分析方法主要有三大类: 一是基于极限平衡理论的传统刚体极限平衡法, 如 Fellenius 条分法、简化 Bishop 法、Janbu 法、Sarma 法、Spencer 法、Mongenstern-price 法等; 二是以塑性力学中的上下限定理为基础的极限分析法[1-2]; 三是以有限元为代表的数值极限分析法, 如强度折减法与重度加载法。土体极限平衡法的思想始于 1773 年的库仑定律, 20 世纪 30 年代年前后建立了极限平衡法, 50 年代提出了极限分析的上、下限法。1975 年, 英国学者 O.C.Zienkiewicz 提出在有限单元法中采用增加荷载 (超载法) 或降低岩土抗剪强度指标 (强度折减法) 的方法来计算极限荷载和边坡稳定性系数[3]。80、90 年代曾用该法分析了边坡和地基的稳定[4], 但因当时缺少严格可靠、功能强大的有限元计算软件以及对于屈服准则的选用和操作技术掌握不足等原因, 导致精度难以满足工程实践的要求而未能在岩土工程

领域广泛应用。20 世纪末, 多篇关于有限元强度折减法求解均质土坡稳定性系数的文章在国际上公开发表了[5-9], 其算例得到的结果与传统极限分析方法结果较为接近, 逐渐得到学术界认可, 尤其是 1999 年 D.V.Griffith 等人用自编有限元程序分析了均质土坡的稳定性[5-7], 其创新之处在于该程序不仅能模拟孔隙水压力的影响, 还可以分析库水位下降等工况下边坡稳定性, 因而有学者认为强度折减法开创了关于边坡稳定性分析的新时代。在国内, 1997 年宋二祥最先介绍了有限元强度折减法在土坡中的应用[10]。21 世纪初, 国内学者开始致力于有限元强度折减法基本理论和提高计算精度的研究, 并试图应用于边坡工程中[11-15]。

传统极限分析法百余年来发展已趋于成熟。当前, 极限分析法在工程实践中具有较好的应用效果, 解决了岩土工程边坡稳定问题, 但仍存在不可忽视的缺陷。赵尚毅等[13]指出传统刚体极限平衡法忽视了边坡土体本身是变形体, 未考虑土体内部的应力应变

关系,无法分析边坡失稳破坏的发生和发展过程,并且在求解稳定性系数时需要假定滑动面形状。对于破坏机制复杂的边坡、复杂层状及非均质岩土体和多场耦合等复杂工况时,该法难以适用。

伴随着岩土力学数值分析方法的发展,学界兴起了数值极限分析法。这一方法既有很广的适用面,又具有良好的实用性。近年来,郑颖人等[13-15]针对数值极限法做了较为深入的探究,发现有限元强度折减法与超载法在本质上就是将数值方法应用于求解极限分析问题,并扩大了它的计算功能。不仅可求出稳定性系数与极限荷载,还可求得岩土体的破坏位置与形态,是对传统极限分析法的发展,将其称为数值极限分析法或有限元(包含有限差分、离散元等)极限分析法。

数值极限分析法除了应用于边坡工程以外,还能运用于其它多种情况,如煤矿巷道因回采推进长度过大而引起采场顶失稳,冻土边坡因温度升高而失稳,库岸边坡由于库水位骤然上升而失稳等。只要固体材料(如钢材、混凝土)满足受力从弹性发展到塑性再到破坏的情形,这一方法都将适用。

国际上通常采用有限元强度折减法求解岩土体边坡滑动面的稳定性系数,用有限元增量加载(超载)法计算地基极限承载力。前者研究取得了颇多喜人的成果,而后者还处于起步阶段。此外,上述两种方法在本质上都是基于有限单元法并利用数值分析方法求解的极限分析法,因此将其统称为数值极限分析法或有限元

极限分析法。

## 2 数值极限分析法在边坡工程中的应用

### 2.1 土质边坡中的应用

某均质土坡,坡高  $H=20\text{ m}$ ,容重  $\gamma=20\text{ kN/m}^3$ ,粘聚力  $c=42\text{ kPa}$ ,内摩擦角  $\varphi=17^\circ$ ,求坡角  $\beta=30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$  时边坡的稳定性系数以及对应的滑动面。

首先建立计算模型,边界条件为左右两侧水平约束,下部固定,上部为自由边界,如图 5 所示。其中,力和位移的收敛标准均取  $10^{-5}$ ,最大迭代次数设为 1000 次,一次性施加全部重力荷载。

表 1 为不同屈服准则下匹配非关联流动法则时的稳定性系数,表 2 为不同屈服准则下匹配关联流动法则时的稳定性系数。平面应变 Mohr -Coulomb 匹配 D-P 准则在关联和非关联流动法则条件下分别采用 DP5 与 DP4,而对于 Mohr -Coulomb 等面积圆 DP3 准则和外角点外接圆 DP1 准则用同一种表达式,但两者所用膨胀角各异。极限平衡法使用 SLOPE/W 软件进行计算。

根据表格发现,无论采用非关联流动法则的 Mohr-Coulomb 匹配 DP5 准则还是采用关联流动法则的 Mohr-Coulomb 匹配 DP4 准则,计算结果与经典极限平衡法中的 Spencer 法十分接近,误差不足 2%。这是因为平面应变条件下 Mohr-Coulomb 匹配 D-P 准则实际上就是在平面应变条件下的 Mohr-Coulomb 准则。

Table 1. Safety Factor By Different Methodwith Associatedflow Rule.

表 1. 采用非关联法则时不同准则条件下的稳定安全系数

坡角/ (°)	30	35	40	45	50
DP1	1.91	1.74	1.62	1.50	1.41
DP3	1.64	1.49	1.38	1.27	1.19
DP5(非关联流动法则)	1.56	1.42	1.31	1.21	1.12
极限平衡 spencer 法 (S)	1.55	1.41	1.30	1.20	1.12
(PD1-S)/S	0.23	0.23	0.25	0.25	0.26
(PD3-S)/S	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06
(PD5-S)/S	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00

Table 2. Safety Factor By Different Methodwith Deviatoric Flow Rule

表 2. 采用关联流动法则时不同准则条件下的安全系数

坡角/ (°)	30	35	40	45	50
DP1	1.93	1.77	1.65	1.54	1.44
DP3	1.66	1.51	1.40	1.30	1.21
DP4(非关联流动法则)	1.56	1.42	1.32	1.22	1.13
极限平衡 spencer 法 (S)	1.55	1.41	1.30	1.20	1.12

(PD1-S)/S	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29
(PD3-S)/S	0.07	0.07	0.08	0.08	0.08
(PD4-S)/S	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01

Mohr-Coulomb 等面积圆 DP3 屈服准则匹配非关联法时,与传统极限平衡方法中的 Spencer 法计算结果误差在 6%左右;使用关联流动法则时,误差在 7%左右,而在 DP1 准则下的计算结果比 Spencer 法大 25%以上。

在确定滑动面时,边坡水平位移或者等效塑性应变等值云图可以直观的反映潜在滑动面的位置,这与传统方法确定的滑面是一致的,算例结算结果见图 1、图 2、图 3。

## 2.2 岩质边坡中的应用

### 2.2.1 顺层岩体边坡

如图 4 所示,有两组完全贯通且平均间距 10m 的结构面,第一组结构面倾角 30°,第二组结构面倾角 75°。

按数值极限分析法采用平面应变模拟得到如图 5 所示的滑动面,首先形成了主滑面(见图 5(a)),接着出现第二、三条次生滑面(见图 5(b))。数值极限分析法算得稳定性系数为 1.18;由于已知主滑面形态,再用 Spencer 法算出稳定性系数为 1.17,结果基本一致。

### 2.2.2 倾倒岩体边坡

如图 6 所示的倾倒边坡,岩体重度 24.0kN/m<sup>3</sup>,黏聚力 1100kPa,内摩擦角 41°,岩层倾角为 70°;结构面重度 24.0kN/m<sup>3</sup>,黏聚力 100 kPa,内摩擦角 20°。反倾层状岩体由于倾角过大容易产生向坡外的开裂裂隙、弯折变形和折断破坏,引起边坡倾倒失稳。



图 1. 用等效塑性应变等值云图表示的滑动面位置和形状



图 2. 用水平位移等值云图表示的滑动面位置和形状

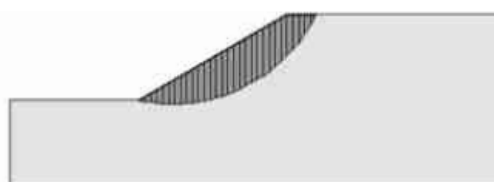


图 3. 用加拿大边坡稳定分析软件 SLOPE /W 得到的滑动面形状

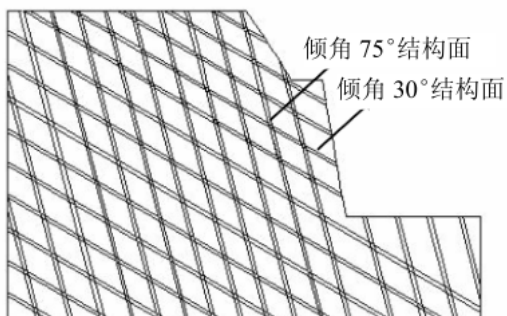
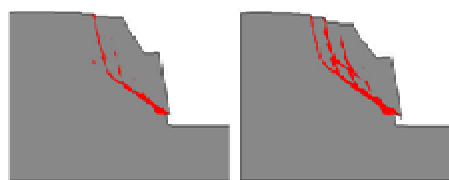


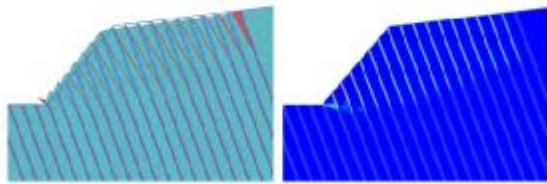
图 4. 几何模型

图 7 中,一组结构面倾角为 90°,另一组结构面倾角为 20°,采用离散元法,计算结果反映出块体崩塌破坏的情况。



(a)首先贯通的滑动面 (b)滑动面继续发展

图 5. 岩石边坡的破坏过程



(a) 倾倒地形 (b) 近似直线型滑动面

Figure 6. Failure characteristics of tilting slope

图 6. 倾倒地边破坏特征

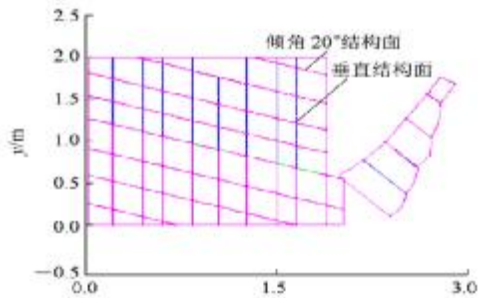


Figure 7. Grids and collapse of blocks after deformation

图 7. 变形后的网格与块体崩塌图

### 3 结论

数值极限分析方法与传统极限分析法计算方法不同，但原理相同。前者运用弹塑性数值计算直至达到破坏状态，自动生成滑动面，既能求出稳定性系数，又能求出应力应变关系，已经在不少实际工程中展开了应用，但目前仍有许多地方还有待完善。比如如何对复杂工程下的破坏问题提供准确、适用的破坏判据。

### References (参考文献)

- [1] HILL R. Theory of plasticity mathematics[M]. Translated by WANG Ren. Beijing: Science Press, 1966.
- [2] ZHENG Yingren, KONG Liang. Geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2010.
- [3] ZIENKIEWICZ O.C., HUMPHESON C., LEWIS R.W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics [J]. Geotechnique, 1975, 25(4), 671-689.
- [4] MATSUI T, SANK C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique[J]. Soils and Foundations, 1992, 32(1), 59-70.
- [5] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Geotechnique, 1999, 49(3), 387-403.
- [6] LANE P.A., GRIFFITHS D.V. Assessment of stability of slopes under drawdown conditions[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2000, 126(5), 443-450.
- [7] Dawson E.M., Roth W.H., Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Geotechnique, 1999, 49(6), 835-840.
- [8] Smith I.M., Griffiths D.V. Programming the Finite Element Method, 3rd Edition[M]. John Wiley and Sons Chichester, New York, 1998.
- [9] Ugai K. A method of calculation of total factor of safety of slopes by elasto-plastic FEM[J]. Soils and Foundations, 1989, 29(2): 190-195.
- [10] SONG Erxiang. Finite element analysis of safety factor for soil structures[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(2): 1-7.
- [11] LIAN Zhenying, HAN Guocheng, KONG Xianjing. Stability analysis of excavation slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(4), 407-411.
- [12] ZHENG Hong, LI Chunguang, LEE C.F., et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(5), 626-628.
- [13] ZHAO Shangyi, ZHENG Yingren, SHI Weimin, et al. Slope safety factor analysis by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3), 343-346.
- [14] ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi, Li Anhong, et al. FEM limit analysis and its application to slope engineering[M]. Beijing: China Communications Press, 2011.
- [15] ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi. Limit state finite element method for geotechnical engineering analysis and its application[J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(1), 91-99.