Optimal Copula Analysis of Mechanical Components Reliability with Correlated Failure Modes

Song ZHOU
School of Electro-mechanical & Automobile Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing, 400074, China

Abstract: To consider a failure mode correlation of mechanical components. Using copulas connect function describing the correlation of advantage. Choose the optimal copulas connect function is presented to realize the reliability of mechanical components modeling method.This method is a kind of independent of copulas connect model parameter selection method, namely the bayesian model selection method. Thus concluded that can be used to select the optimal copulas connect function to realize the reliability analysis of mechanical parts. By an example in comparison with other methods, the results show that the model can well solve the problem of mechanical parts reliability prediction.

Keywords: Mechanical parts;Correlated failure mode;Reliability;Copula function; Bayesian model selection

失效模式相关机械零部件可靠性的 Copula 分析

周松
重庆交通大学机电与车辆工程学院，重庆，中国，400074

摘　要：针对考虑有失效模式相关性的机械零部件，利用 Copula 函在描述相关性方面的优势，提出了合理选择最优 Copula 函数来实现机械零部件的可靠性建模方法。该方法是一种独立于参数的 Copula 模型选择方法，即贝叶斯模型选择法。进而得出可以利用选择的最优 Copula 函数实现机械零部件的可靠性分析。通过算例与其它方法进行比较，结果显示该模型可以较好地解决机械零部件可靠性预计问题。

关键词：机械零部件；失效模式相关；可靠性；Copula 函数；贝叶斯模型选择法模板

1 引言

机械零部件可靠性是指零部件在规定的时间内和规定的条件下完成预定功能的能力。传统的机械零部件可靠性分析没有考虑失效模式相关性对零件可靠性的影响。但是机械零件在工作时的失效是各类不确定因素综合作用的结果。如果忽视了这些因素的作用必然会对机械零件的可靠性分析产生一定的影响。现代对机械零部件的研究中考虑到了零件中存在多种失效模式，且各个失效模式的功能函数具有共同的随机源，因此各失效模式之间存在相关性问题[1-2]。如何准确反映考虑失效模式相关性对机械零部件可靠性分析的影响是亟待解决的关键问题之一。近年来，国内外很多学者都选用 Copula 函数作为探讨相关性的工具，取得了一定的成果。

国外的 Eryilmaz[3]基于多变量 Copula 理论对结构系统的生存函数与动态可靠度进行了建模分析。Jiang 等[4]采用基于 Copula 函数的证据理论模型对结构的可靠度进行了研究分析。国内的韩文钦等[5]采用基于混合 Copula 函数对机械零部件结构系统进行可靠性建模和分析，为具有相关失效模式的机械零部件可靠性分析奠定了基础。何成铭等[6]构建了基于 Copula 的机械系统可靠性模型，阐述了该方法在系统可靠性分析中的应用。然而，上述对于 Copula 函数的种类有很多但并没有提出如何选择恰当的 Copula 函数来描述零件中各失效模式的相关性。本文在已有文献的的基础上，针对具有多种失效模式的机械零部件，采用贝叶斯理论的 Copula 选择法选出最优 Copula 函数。从而运用选出的最优 Copula 函数对失效模式相关性的机械零部件进行可靠性建模和分析。结合算例表明了该方法的有效性，为求解多失效模式相关性的机械零部件可靠性分析提供新思路。

2 Copula 函数的基本理论

Sklar 提出 Sklar 定理[7]：设二维联合分布函数 H 具有 F 和 G 的边缘分布，那么存在一个 Copula 函数

C，对任意 $x, y \in [-\infty, +\infty]$。满足

$$H(x,y)=C\left(F(x),G(y)\right) \quad (1)$$

若 F 和 G 连续，则 C 是唯一的，设 H 是 n 维联合分布函数，边缘分布函数为 $F_1, F_2, ..., F_n$。对任意 $X\in [0,1]^n$，存在一个 n 维 Copula 函数 C,使得

$$H(x_1,x_2,...,x_n)=C_n\left(F_1(x_1),F_2(x_2),...,F_n(x_n)\right) \quad (2)$$

如果 $F_1, F_2, ..., F_n$ 都连续，那么 C 是唯一的。

3 失效相关性机械零部件可靠性的 Copula 模型

在零件的可靠性分析中，一种机械零件可能有多种失效模式，如屈服、断裂、累积疲劳、腐蚀磨损等，若要更加准确的分析机械零件的可靠性，就要充分考虑到各个失效模式的相关性的影响。由于失效模式之间具有相同的随机参数，因此失效模式之间必定存在相关系数，因此可以将机械零部件在多种失效模式条件下的失效看作是一种串联系统，则零件失效可以看作为各个失效模式的串联失效[8]。设机械零件失效模式之间的串联系统的单元中有 n 个失效模式，对应于不同的失效模式，其功能函数为：

$$g_i(\boldsymbol{X})=g_i\left(X_1,X_2,...,X_n\right) i=1,2,\ldots,n \quad (3)$$

其中，$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,...,X_n)^T$ 为多个失效模式中的随机变量的向量，$g_i(\boldsymbol{X})$ 代表第 i 个失效模式的功能函数。

如果机械零部件某种工作的条件下仅仅只考虑两种失效模式时，根据式(3)的功能函数 n=2。从而可得机械零件的两种串联系统的失效概率为：

$$\begin{aligned} P &= P\left(g_1(\boldsymbol{X})\le 0 \,\mathbf{U}\, g_2(\boldsymbol{X})\le 0\right) \\ &= P_1+P_2-C\left(P_1,P_2\right) \end{aligned} \quad (4)$$

当机械零件在恶劣的条件下工作，那么零件在复杂工况下有多种个失效模式相关时，则零件中多维串联系统的失效概率可表示为：

$$\begin{aligned} P &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} g_i(X_1,X_2,...,X_n)\le 0\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}P_i-\sum_{1\le i<h\le n}C(P_i,P_h)+\sum_{1\le i<h<t\le n}C(P_i,P_h,P_t)- \\ &\quad ...+(-1)^{n-1}C(P_1,P_2,...,P_n) \end{aligned} \quad (5)$$

式中，$P_1,P_2,...,P_n$ 分别为 n 个失效模式的失效概率，C(·)表示 n 维 Copula 函数。

从上面的分析可知，通过建立基于 Copula 函数的失效相关性机械零部件可靠性模型，选择最优的 Copula 函数来求解失效模式相关性时机械零部件的可靠度值是本文需要做的研究。

4 Copula 模型的选择与构建

在一定的应力作用下，因为机械零部件承受共同载荷冲击以及外部环境等，所以机械零件中各个失效模式之间存在相互关系，这种关系常用正相关性来表示。常用的正相关 Copula 函数有多元正态 Gaussian Copula 函数，Gumbel Copula 函数，Clayton Copula 函数及 Frank Copula 函数。Huard[9]提出了贝叶斯 Copula 选择方法，并应用于双变量 Copula 函数的建模。这种选择方法主要是通过贝叶斯假设检验选择最优的 Copula 函数。贝叶斯模型选择独立于参数估计，设 Q 为上述已知的 Copula 函数组成的集合。假设 H^l 表示数据之间的相关关系且用 C_l 来描述，l=1,2,…,Q， $C_l=(u_i,v_i;q_i)$ (i=1,2,…,n)，n 个相互独立的数组 (u^i,v^i) 构成数据集 D，那么计算 pr（H_l|D）表示给定数据 D 满足第 l 个假设的概率，根据贝叶斯理论可以得到

$$pr(H_l\mid D)=\frac{pr(D\mid H_l,I)\,pr(H_l\mid I)}{pr(D\mid I)} \quad (6)$$

式中，pr(D|H_l,I)表示似然函数，pr(H_l|I)表示的是 Copula 函数族的先验概率；pr(D|I)表示的是正则化常数；I 表示相关的额外信息。因此，取得最大 pr（H_l|D）值的 Copula 函数就是要找的最优 Copula 函数。

对于 Copula 函数来说，它的分布密度函数主要依赖于参数 θ，而参数 θ 是任意的，因此可以用于 θ 有关的 Kendall $'t=g_l(q)$ 来代替 θ，可以得到

$$pr(H_l\mid D,I)=\int_{-1}^{1}pr(H_l,t\mid I)dt \quad (7)$$

式中， pr(H_l|t ,I)表示对于假设分布族的先验分布；pr(t |I)表示 Kendall $'t$ 的先验概率密度。由于 n 对变量 (u^i,v^i) 是相互独立的，因而 Pr(D|H_l,t ,I)可以进一步表示为：

$$pr(D\mid H,t,I)=\prod_{i=1}^{n}pr(u_i,v_i\mid t,H_l,I) \quad (8)$$

式中，$c_l(u_i,v_i\mid g_l^{-1}(t))$ 是第 l 个 Copula 函数。$pr(t\mid I)=\frac{1}{l(\Lambda)}$，其中 $t\in\Lambda$，$l(\Lambda)$ 是 Λ 的 Lebesgue 测度，这里表示它的长度。将(11)式代入(9)式中有

$$W_l = \frac{1}{l(\Lambda)} \int_{\Omega_l \cap \Lambda} \prod_{i=1}^{n} c_l(u_i, v_i \mid g_l^{-1}(t)) dt \quad (9)$$

$$l = 1, 2, \ldots, Q$$

假设已知数据 D 和四种正相关性 Copula 类型，仅仅只需比较 W_l 的值，具有最大 W_l 的 c_l 就是最优 Copula 函数。将上述用来表示失效模式相关性的四种 Copula 函数分别利用贝叶斯选择法来验证，从常用 Q-Q 图中可以得到 Clayton Copula 函数更能有效拟合数据。吴庆晓等[10]也指出 Clayton Copula 函数能更加准确地刻画相关性问题。由于 Clayton Copula 函数对于构造多元联合分布函数有很广泛的应用，且与可靠度函数在数学上具有相似性，说明 Clayton Copula 函数适合用来构造失效模式相关性的机械零部件可靠性模型。多元 Clayton Copula 函数的分布函数表示为

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n; q) = \left(u_1^{-q} + u_2^{-q} + \ldots + u_n^{-q} - 1\right)^{-\frac{1}{q}} \quad (10)$$

式中，$q \in (0,1]$ 为失效模式相关程度系数，q =1 表示随机变量 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 独立，也就是说各失效模式相互独立。$q \to 0$ 表示随机变量 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 趋于完全相关。那么，各失效模式也趋于完全相关。

则可以令 $u_i = P_i = 1 - R_i$，代入式（10）可得

$$C(P_1, P_2, \ldots, P_n; q) = \left(P_1^{-q} + P_2^{-q} + \ldots + P_n^{-q} - 1\right)^{-\frac{1}{q}} \quad (11)$$

则机械零件存在 n 个相关失效模式时，则将式(11)代入式（5）得零件可靠度为：

$$\begin{aligned} R_c &= 1 - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{1 \le i < h \le n} C(P_i, P_h) - \sum_{1 \le i < h < t \le n} C(P_i, P_h, P_t) + \\ &\ldots - (-1)^{n-1} C(P_1, P_2, \ldots, P_n) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{1 \le i < h \le n} \left\{ \left(P_i^{-q} + P_h^{-q} - 1\right)^{-\frac{1}{q}} \right\} \\ &+ \ldots - (-1)^{n-1} \times \left\{ \left(P_1^{-q} + P_2^{-q} + \ldots + P_n^{-q}\right)^{-\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

式中，R_c 为零件的可靠度，P_i 为零件中第 i 个失效模式的失效概率。i=1,2,…,n。

5 算例分析

知某机器零件的功能函数为：

$$G(X) = X_1 - X_2 X_3^2$$

求零件的可靠度。式中各失效模式随机变量均服从正态分布，分布参数见表 1，利用 FROM 得到各失效模式下可靠度指标 b_1 =3.859、b_2 =1.135、b_3 =1.538，失效概率分别为 P_1 =0.9856、P_2 =0.8728、P_3 =0.9462。代入式(10)中得到该零件的可靠度为 R_c =0.8729。

表 1. 各失效模式随机变量分布参数

随机变量	均值	标准差
X_1	25	0.25
X_2	4.0	0.2
X_3	2.0	0.1

通过算例分析表明了该方法的适用性。

6 结论

本文在考虑失效模式相关性的机械零部件可靠性分析中合理选用最优 Copula 方法，建立了机械零部件的 Copula 可靠性计算模型，进而对机械零部件进行可靠性分析。文中引入了一种独立于参数的贝叶斯 Copula 模型选择方法来选择最优 Copula 函数。最后结合算例表明最优 Copula 函数能够比较准确的刻画机械零件失效的相关性。研究结果为解决考虑失效模式相关性的机械零部件的可靠性分析提供了一种新方法。

7 资助信息

基金项目：重庆市基础科学与前沿技术研究专项基金资助（cstc2015jcyjBX0133），国家自然科学基金项目（51375519）。

References（参考文献）

[1] Lu H, Zhang Y M. Reliability-based robust design for structural system with multiple failure modes[J], Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2011,39(4)：420-440.
[2] 苏长青,张义民,杜劲松.具有相关失效模式转子系统的频率可靠性研究[J].机械工程学报，2012，48 (06)：179-183.
[3] Serkan E. Multivariate copula based dynamic reliability modeling with application to weighted-k-out-of-n systems of dependent components [J]. Structural Safety. 2014, 51(51)： 23-28.
[4] jiang C, Zhang W, Wang B and Han X. Structural reliability

analysis using copula-function-based evidence theory model[J].Computer and Structures. 2014, 143：19-31
[5] 韩文钦,周金宇,孙奎洲.失效模式相关的机械机构可靠性的Copula 分析方法[J].中国机械工程，2011，22(3)：278-281.
[6] 何成铭,吴纬,孟庆均,基于 Copula 的机械系统可靠性模型及应用[J].兵工学报，2012，33(3)：379-384.
[7] Sklar A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges [J].Publication de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris, 1959, 8： 229-231.
[8] 卢昊,张义民,赵长龙,等.多失效模式机械零件可靠性灵敏度估计[J].机械工程学报，2012，48(2)：63-67.
[9] Huard D,Évin G and Favre AC.Bayesian copulaseletion[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2006, 51：809-822.
[10] 吴庆晓,刘海龙.基于 Copula 模型的风险相关方[J]系统管理学报，2011，20(6)：752-759.