

# Discussion on Slope Stability Coefficient by Limit Equilibrium Method and Finite Element Method

SiJie LIU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>School of River & Ocean Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing, 400074, China  
Email:egx136788@163.com

**Abstract:** Rigid body limit equilibrium method and numerical limit analysis method are commonly used to solve the slope stability coefficient. In order to compare the accuracy of stability coefficients obtained by different methods, the Fellenius method, the simplified Bishop method, the Mongenstern-price method, the strength reduction method and the gravitational loading method were used to compare the results of the typical homogeneous soil slopes and layered soils Slope, and using Mongenstern-price method as the accurate result, statistical analysis of the variation law of stability coefficient error under different methods. The results show that under the assumption that the slip surface is a circular arc surface, the error between the calculated results of the rigid body limit equilibrium method is less than 10%. The simplified Bishop method is highly consistent with the Mongenstern-price method and the result of the Fellenius method The relative error between the strength reduction method and the Mongenstern-price method is between 3% and 12% at different slope angles, and the relative error between the strength reduction method and the Mongenstern-price method is between 3% and 12% %, But the strength reduction method does not need to assume the sliding surface position, can provide all the information of stress, strain, displacement and plastic zone force and deformation, is recommended for the calculation of complex slope stability; gravitational loading ratio method 45 ° complete failure, the slope angle between 45 ° to 60 ° and Mongenstern-price method and strength reduction method has a greater error, only in the slope angle is equal to 75 ° when the results basically meet the requirements, is not recommended.

**Keywords:** Slope engineering; Limit equilibrium method; Strength reduction method; Gravity load method; Stability-coefficient

## 极限平衡法与数值极限分析法求解边坡稳定性系数讨论

刘思杰<sup>1</sup>

<sup>1</sup>重庆交通大学 河海学院, 重庆, 中国, 410074  
Email:egx136788@163.com

**摘要:** 刚体极限平衡法和数值极限分析法是求解边坡稳定性系数的常用方法。为了比较各类方法所求稳定性系数的精度, 分别使用 Fellenius 法、简化 Bishop 法、Mongenstern-price 法、强度折减法和重力加载法针对不同坡角下的典型均质土坡和分层土坡进行计算, 并以 Mongenstern-price 法作为精确结果, 统计分析了不同方法下稳定性系数误差变化规律。结果表明: 在假定滑裂面为圆弧面的情况下, 各类刚体极限平衡方法计算结果之间误差不到 10%, 其中简化 Bishop 法与 Mongenstern-price 法结果高度吻合, Fellenius 条分法结果偏于安全, 认为简化 Bishop 法与 Mongenstern-price 法可互换使用, 建议尽量不使用 Fellenius 条分法; 在不同坡角条件下强度折减法与 Mongenstern-price 法结算结果相对误差介于 3%到 12%之间, 但强度折减法无需假定滑动面位置, 能提供应力、应变、位移和塑性区等力和变形的全部信息, 推荐其用于复杂边坡稳定性计算; 重力加载比例法在坡角小于 45°时彻底失效, 坡角介于 45°到 60°之间时与 Mongenstern-price 法和强度折减法有较大误差, 仅在坡角等于 75°时结果基本满足要求, 不建议使用。

**关键词:** 边坡工程; 极限平衡法; 强度折减法; 重力加载比例法; 稳定性系数

### 1 引言

土质边坡稳定性分析是三大经典土力学课题之

一, 该课题至今未得以圆满解决。当前, 土质边坡稳定性定量分析方法主要有两大类: 一是基于极限平衡理论的传统刚体极限平衡法, 如 Fellenius 条分法、简

化 Bishop 法、Janbu 法、Sarma 法、Spencer 法、Mongenstern-price 法等；二是以有限元为代表的数值分析法，如强度折减法与重力加载法。赵尚毅等[1]指出传统刚体极限平衡法忽视了边坡土体本身是变形体，未考虑土体内部的应力应变关系，无法分析边坡失稳破坏的发生和发展过程，并且在求解稳定性系数时需要假定滑动面形状。对于破坏机制复杂的边坡，传统极限平衡法难以求解，目前国内外建筑行业已普遍采用数值极限分析法，数值极限分析法与传统刚体极限平衡法原理相同，求解方法不同，但得到的结果一致。同时，不少学者研究了强度折减法和重力加载比例法。例如，郑颖人等[2]认为强度折减法考虑了土体应力应变关系，同时可以得到土体的非线性本构关系，提供了更加精确合理的计算结果；徐卫亚等[3]探究了基于强度折减法和重力加载法关于边坡破坏的判断准则，提出可以用变形变化趋势作为边坡失稳破坏的判别依据，这与张顶立[4]提出的以变形控制为核心的思想基本一致，从而得出了强度折减法较重力加载比例法可靠性好且适用范围广的结论；康亚明等[5]基于 Drucker-Prager 屈服（或强度）准则将重力加载比例法应用于边坡三维有限元分析，指出重力加载比例法原理简单、方便工程应用，然而他们所采用的算例相对简单，并且未比较不同边坡坡角时重力加载比例法的应用效果；刘杰等[7][8]利用有限元分析软件并采用重力加载比例法与强度折减法分别计算了不同坡角下边坡稳定性系数，指出重力加载比例法较强度折减法适用范围广，计算效率高，可作为传统极限平衡法和强度折减法计算结果的有效参考；

郑颖人等[6]探讨了几种不同边坡稳定性系数的定义，指出不同的稳定性系数定义对边坡工程有较不可忽视的影响，建议一般采用强度储备安全系数作为边坡的稳定性系数。对于边坡工程设计来讲，合理选择方法求解边坡稳定稳定性系数至关重要。由于在计算边坡稳定性系数时，不同的稳定性系数定义会造成边坡设计的混乱，因而有必要对边坡稳定性系数进行说明。笔者基于土的抗剪强度指标和强度准则等经典土力学知识，阐述了极限平衡理论、强度折减法与重力加载比例法的基本原理，总结整理了不同学者对于稳定性系数的定义，最后利用有限元分析软件并结合工程算例阐明上述不同计算方法所求边坡稳定性系数在典型均质土坡与分层土坡中的变化规律。

## 2 计算方法原理分析

### 2.1 极限平衡法 (LEM)

极限平衡法中假定由于部分坡体沿边坡内产生的滑裂面滑动而造成边坡临界失稳破坏，滑裂面上服从 Mohr—Coulomb 屈服准则。由于边坡稳定性分析大多是超静定问题，极限平衡法通过引入不同假设来简化模型，使之成为静定问题。考虑滑裂面形成的隔离体的静力平衡来作为滑裂面上坡体稳定状态的判别。其中，隔离体静力平衡由力的平衡和力矩平衡组成。在求解过程中首先假定边坡沿某一确定滑动面滑动，在基于 Mohr—Coulomb 屈服准则下根据该边坡静力平衡条件计算沿该滑动面滑动的概率，即稳定性系数的大小。通过选取多个不同的滑动面并计算相应稳定性系数，最终选取稳定性系数最小的滑动面作为最危险滑动面。极限平衡法各方法主要特征见表 1。有关极限平衡法合理性假设[9]如下：

假设土条是刚体，且事先假定滑裂面形状并认为滑裂面上所有点同时达到极限平衡状态。

滑裂面上抗剪强度指标采用 Mohr—Coulomb 屈服准则，滑裂面上土体为刚塑性材料。视整个滑裂面上稳定性系数为常数。

### 2.2 强度折减法 (SRM)

顾名思义，强度折减就是对岩土材料的抗剪强度指标进行折减。计算时，先选取一个较小初始折减系数对土体抗剪强度指标进行折减，将折减后的参数输入，进行有限元计算。这里将力和位移的收敛与否作为失稳破坏判据，若力和位移收敛，则土体处于稳定状态。通过逐步增加折减系数直至计算结果不收敛，该时刻土体达到临界破坏状态，此时的折减系数即为边

表 1. 极限平衡法各方法主要特征

极限平衡条分法	对多余变量所做的假定	特征
Fellenius 条分法	条块间无任何作用力	圆弧滑动面 满足力矩平衡
简化 Bishop 法	条块间只有水平作用力	圆弧滑动面 满足力矩平衡
Janbu 条分法	条块间只有水平作用力	滑动面形状任意 满足力矩平衡
Sarma 法	对土条侧向力大小的分布函数做假定，引入临界加速度系数	滑动面形状任意 满足力和力矩平衡
Spencer 法	条块间水平与垂直作用力之比为常数	滑动面形状任意 满足力和力矩平衡
Mongenstern-Price 法	条间切向力与法向力之比与水平方向坐标之间存在某一函数关系	滑动面形状任意 满足力和力矩平衡

坡稳定性系数,这种方法即强度折减法。

$$c' = c / F_s \quad (1)$$

$$f' = \arctan(\tan f / F_s) \quad (2)$$

郑颖人等[3]认为用强度折减法求解边坡稳定性系数时,不需要假定滑裂面的形状和位置,也无需进行条分,而是由程序自动求出滑裂面与强度储备稳定性系数,而且从计算过程中可以看到土坡逐步破坏的过程。图 1 演示了强度折减法基本原理:在对抗剪强度指标折减时,强度包线逐渐逼近潜在滑动面上一点的应力圆并最终与其相切,这时的折减系数  $F_s$  就是边坡稳定性系数。

### 2.3 重力加载比例法 (GLM)

图 2 演示了重力加载比例法基本原理:在土体强度指标不变时,潜在滑动面上一点的应力圆逐渐右移,同时应力圆半径逐渐增大,最终应力圆与抗剪强度包线相切,表示该点达到临界破坏状态。

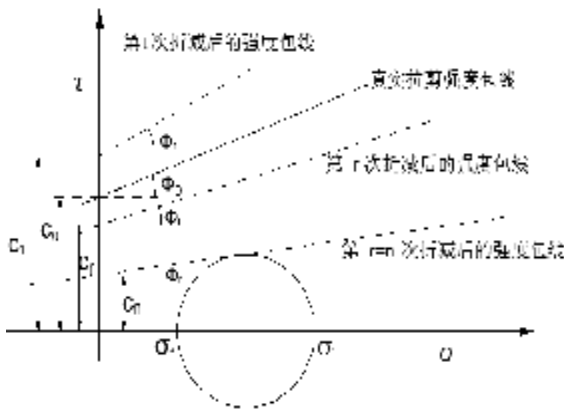


图 1. 强度折减法中对 Mohr-Coulomb 强度包线折进行折减的过程

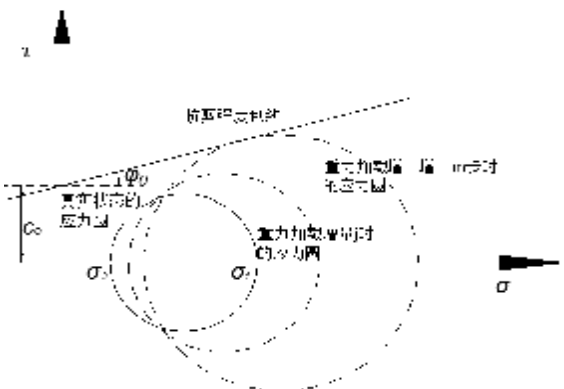


图 2. 重力加载比例法中应力状态演进示意图

与强度折减法不同的是,重力加载比例法保持抗

剪强度指标不变,通过逐渐增加土体自重使边坡进入失稳破坏临界状态。在增加重力荷载的同时,剪应力  $t$  和正应力  $s_n$  也按比例增加,达到失稳破坏临界状态时有

$$1 = \frac{\int_l [c + (s_n \cdot F_s) \tan j] ds}{\int_l (t \cdot F_s) ds} = \frac{\int_l [(c / F_s) + s_n \tan j] ds}{\int_l t ds} \quad (3)$$

由(3)式知,重力加载比例法相当于仅对粘聚力  $c$  折减的强度折减法。

### 3 稳定性系数的定义

计算边坡稳定性系数时,不同稳定性系数定义会造成边坡设计的混乱,因此有必要统一边坡稳定性系数的定义。下面给出了两种稳定性系数定义。

(1) 1916年 Petersen 提出的条分法中对稳定性系数定义为滑裂面上所有抗滑力矩与滑动力矩之比。该法将圆柱形滑动面上土块进行垂直条分,完全不考虑土条之间的作用力。通过对多个可能滑裂面进行计算,分别得到稳定性系数,从中选取最小值作为最危险滑裂面稳定性系数,以此作为判别边坡失稳与否的标准。稳定性系数表达式如下:

$$\min(F_s^i) = M_j^i / M^i (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (4)$$

式中:  $F_s^i$  为第  $i$  条可能滑裂面的稳定性系数,  $M_j^i$  为第  $i$  条可能滑裂面下方土体对上方土体产生的最大抗滑力矩,  $M^i$  为第  $i$  条可能滑裂面实际滑动力矩。

1955年, Bishop 提出全新稳定性系数定义:沿整体滑动面上的抗剪强度与实际剪应力之比。公式如下:

$$F_s = \frac{\int_0^l (c + s_n \tan f) dl}{\int_0^l t dl} \quad (5)$$

将(5)式两边同时除以  $F_s$ , 得:

$$1 = \frac{\int_0^l \left( \frac{c}{F_s} + s_n \frac{\tan f}{F_s} \right) dl}{\int_0^l t dl} = \frac{\int_0^l (c' + s_n \tan f') dl}{\int_0^l t dl} \quad (6)$$

式中  $c = \frac{c'}{F_s}$ ,  $\tan f' = \frac{\tan f}{F_s}$ 。

式(6)左边等于 1,表明当强度折减  $F_s$  以后,坡体达到临界破坏状态。可以看出,强度折减法在本质上与传统方法是一致的。

上述将强度指标的储备作为稳定性系数定义。该方法经过多年实践而被广泛认可,这种稳定性系数仅仅降低抗滑力,而不改变下滑力。同时,强度折减法也较为切合工程实际,许多边坡失稳破坏的发生也常

常因外界因素引起岩土体材料强度降低而造成。

(2) 重力加载比例法中, 定义边坡稳定性系数为边坡达到失稳破坏临界状态时的土体自重  $\gamma_{fail}$  与土体真实自重  $\gamma_0$  之比[7], 即:

$$F_s = \frac{g_{fail}}{g_0} = \frac{F_m \cdot g_0}{g_0} \quad (7)$$

式中,  $F_m$  对应边坡失稳破坏的临界状态时的比例系数  $F_j$ , 其中  $j$  为比例系数变化次数。将上述稳定性系数定义方法归入超载储备安全系数定义。重力加载比例法是将自重增大若干倍后, 坡体达到极限平衡状态, 如此产生了两种边坡稳定性分析方法: 一种是在重力加速度  $g$  不变的情况下, 通过增加土体自重荷载至边坡破坏, 如公式(7)所示; 一种是在质量  $m$  不变的条件下, 通过增加重力加速度  $g$  至边坡破坏, 即:

$$F_s = \frac{g_{fail}}{g_0} = \frac{F_m \cdot g_0}{g_0} \quad (8)$$

式中,  $g_{fail}$  为边坡失稳破坏的临界状态所对应的重力加速度。

### 4 土坡计算结果对比分析

由于边坡稳定性问题主要关心的对象不是位移和变形, 而是力和强度, 因此, 本次计算中采用理想弹塑性本构模型[14], 其中强度折减法与重力加载比例法匹配 Drucker-Prager 屈服准则进行计算, 极限平衡法匹配 Mohr-Coulomb 屈服准则进行计算。

算例中坡高  $H=20m$ , 分别计算坡角  $\alpha=15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $75^\circ$  时边坡稳定性系数。郑颖人等[11]指出, 用有限元计算边坡稳定问题时, 泊松比  $\mu$  与弹性模量  $E$  等变形参数的取值对稳定性系数计算结果的影响极小, 仅需按经验取值, 即便选取有所出入, 也不会影响分析结果。图 3 给出了算例中土质边坡几何尺寸, 该算例将从均质土体和分层土体分别计算分析。均质土坡材料参数见表 2, 分层土坡材料参数见表 3。

均质土坡与分层土坡计算结果分别见表 4、表 5。同时, 为便于直观的说明结果, 将不同方法计算所得稳定性系数绘制成折线图, 见图 4 和图 5。

由图 4 和图 5 可知, 在典型均质土坡与分层土坡中, 三种传统极限平衡法稳定性系数计

表 2. 均质土坡材料参数

土层	E/MPa	$\mu$	C/KPa	$\phi/(\circ)$	$\gamma/(kN/m^3)$
均质土	22	0.30	20	30	17

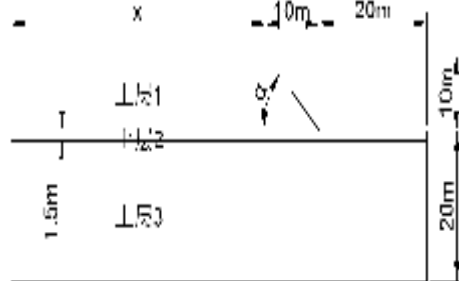


图 3. 算例的土坡分层和几何尺寸

表 3. 分层土坡材料参数

土层	E/MPa	$\mu$	C/KPa	$\phi/(\circ)$	$\gamma/(kN/m^3)$
土层 1	10	0.30	20	30	17
土层 2	10	0.30	30	20	18
土层 3	10	0.30	10	32	19

表 4. 均质边坡几种方法计算的边坡稳定性系数

坡角/ ( $\circ$ )	15	30	45	60	75
简化 Bishop 法	3.81	2.32	1.73	1.36	1.06
Fellenius 条分法	3.58	2.19	1.67	1.35	1.11
Mongenster-Price 法	3.80	2.31	1.74	1.41	1.11
强度折减法	4.19	2.45	1.78	1.39	1.13
重力加载比例法	×	×	3.44	1.76	1.18

表 5. 分层土质边坡几种方法计算的边坡稳定性系数对比

坡角/ ( $\circ$ )	15	30	45	60	75
简化 Bishop 法	3.65	2.33	1.73	1.36	1.06
Fellenius 条分法	3.47	2.14	1.67	1.35	1.11
Mongenster-Price 法	3.66	2.28	1.74	1.41	1.11
强度折减法	3.98	2.03	1.78	1.41	1.13
重力加载比例法	×	×	3.48	1.83	1.20

算结果之间基本呈线性关系, 两两之间最大误差不超过 10%。极限平衡法稳定性系数计算结果大小服从如下规律: 当坡角小于  $45^\circ$  时, Fellenius 条分法 < Mongenster-Price 法 < 简化 Bishop 法; 坡角大于  $45^\circ$  时, Fellenius 条分法 < 简化 Bishop 法 < Mongenster-Price 法。一般认为 Mongenster-Price 法计算稳定性系数结果足够精确[13]。Fellenius 条分法计算结果较 Mongenster-Price 法普遍偏小, 认为该结果偏于安全。简化 Bishop 法计算结果与 Mongenster-Price 法相对误差小于 5%, 认为简化 Bishop 法有较高精确性。

对于上述两种典型边坡, 随着边坡坡度降低, 稳定性系数都在增加, 但重力加载比例法与强度折减法计算结果之差逐渐增大, 并且其稳定性系数的增加更为迅速。当边坡坡度小于内摩擦角时, 重力加载比例法失效。根据(3)式, 当坡角小于等于土体内摩擦角

时, 即便粘聚力  $c$  折减到零, 公式(3)都不会成立 (因为砂土边坡稳定性系数应为  $\frac{\tan j}{\tan \alpha}$ ), 表明当边坡坡角小于等于内摩擦角时, 边坡稳定性分析不能使用重力加载比例法。这与计算结果相吻合。

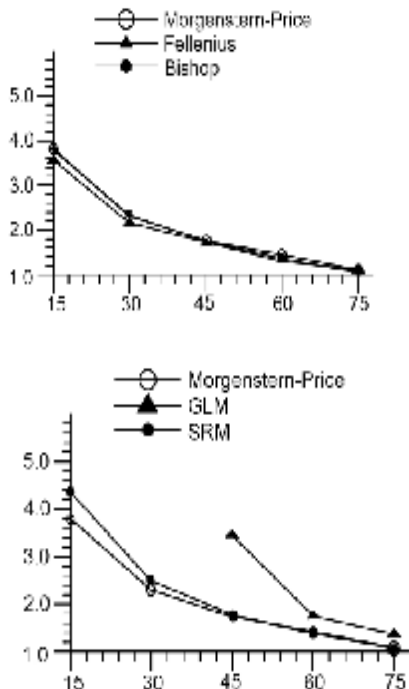


图 4. 均质土坡几种方法计算的边坡稳定性系数对比

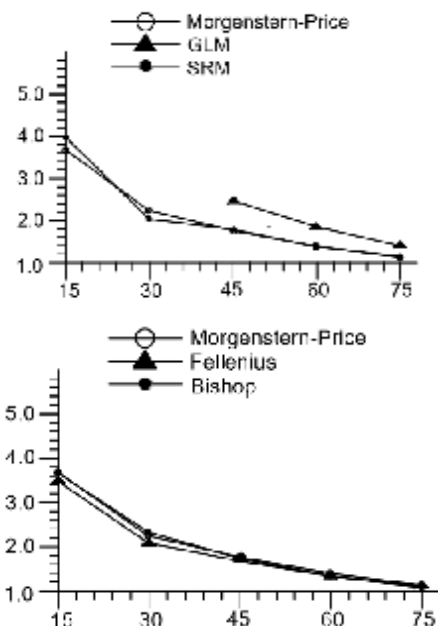


图 5. 分层土坡几种方法计算的边坡稳定性系数对比

对强度折减法 and 重力加载比例法计算结果进行验

证, 发现强度折减法与 Morgenstern-Price 法计算结果符合的很好, 而重力加载比例法与 Morgenstern-Price 法有较大误差。计算结果表明, 仅当坡角等于  $75^\circ$  时, 能与 Morgenstern-Price 法大致吻合。

### 5 结论

(1) 常用极限平衡方法的假设条件不同, 满足的静力平衡条件也不同, 但不同方法稳定系数结果之间基本呈线性关系, 两两之间最大误差不足 10%。假定滑裂面为圆弧面的情况下, 简化 Bishop 法计算结果与精确算法 Morgenstern-Price 法在不同坡角时相对误差不足 5%, 可认为有较高精度, 建议采用; Fellenius 条分法虽然求解简单, 但计算误差大, 结果过于保守, 不建议使用;

(2) 重力加载比例法计算的边坡安全系数随坡角增加而递减的速率要远大于强度折减法, 重力加载法在边坡坡角小于等于内摩擦角 (即  $\alpha \leq \varphi$ ) 时彻底失效, 在边坡坡角大于等于内摩擦角时 (即  $\alpha \geq \varphi$ ), 计算结果仍不能满足精度要求, 与强度折减法和 Morgenstern-Price 法有较大出入, 过于危险。实际上边坡在重力增大时, 不仅使得下滑力增大, 同时会使滑裂面上正应力增大, 而正应力的增大则会引起摩擦力增大, 即事实上下滑力、抗滑力会同时增大, 因而重力加载比例法的实际运用情况与其理论设想有一定出入, 不建议采用。

(3) 强度折减法与 Morgenstern-Price 法在坡角大于等于  $45^\circ$  时计算结果相对误差不足 3%, 坡角小于  $45^\circ$  时相对误差约 6% 至 12%, 认为其计算结果较为可靠。由于重力加载比例法在坡角小于等于内摩擦角 (即  $\alpha \leq \varphi$ ) 时会失效, 常规的极限平衡法无法很好地求解复杂边坡问题 (如具有软弱夹层的边坡), 而强度折减法在求解稳定性系数时, 不需要假定滑动面形状, 也无需进行条分, 计算模型不仅满足力的平衡方程, 而且满足土体的应力应变关系。此时, 强度折减法具有较高的可靠性, 更适合处理复杂边坡问题。

### References (参考文献)

- [1] ZHAO Shangyi, ZHENG Yingren, SHI Weimin, et al. Slope safety factor analysis by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3): 343-346.
- [2] ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi. Application of strength reduction FEM in soil and rock slope[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(19): 3381-3388.
- [3] XU Weiya, XIAO Wu, Study on Criterion of Slope Destruction Based on Strength Reduction and Severe Increase[J]. Chi-

- 
- nese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 28(3): 505-511. 160.
- [4] ZHANG Dingli. Safety Risk of Urban Underground Engineering Construction and Its Control[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2012.
- [5] KANG Yaming, YANG Mingcheng HU Yanxiang, et al. 3D FEM Analysis of Slope Stability Based on Gravity Increase Method[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 23(4): 49-53.
- [6] ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi. Discussion on safety factors of slope and landslide engineering design[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(9): 1937-1940.
- [7] LIU Jie, ZHENG Tao, LI Jianlin, et al. A comparative study of gravity reduction FEM and strength reduction FEM[J]. China Civil Engineering Journal, 2008, 41(10): 66-72.
- [8] LIU Jie, LI Jianlin, WANG Yuehua, et al. Comparative Study on Calculation Methods of Three Slope Safety Coefficient[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, 30(Supp.1): 2896-2903.
- [9] ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SUN Yu-fang. Study of slope failure criterion in strength reduction finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(2): 332-336.
- [10] CHEN Zuyu. Stability analysis of soil slope—principles • methods • program[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003.
- [11] ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi, ZHANG Luyu. Slope stability analysis by strength reduction FEM[J]. Engineering Science, 2002, 4(10): 57-61.
- [12] Shi Hengtong, Wang Chenghua. Some problems in finite element analysis of slope stability[J]. Rock and Soil Mechanics, 2000, 21(2): 152-155.
- [13] The Professional Standards Compilation Group of People's Republic of China. SL386—2007 Water resources and hydropower engineering slope design specifications[S]. Beijing: China Water Power Press, 2007.